חשבון אינטיפיסימלי 1
88 –01,04,07□132
מועד א׳
ו׳ אדר התשס״ב 18.2.02
משך הבחינה: שעתיים
<u>ללא חומר עזר, פרט למחשבון פשוט.</u>

המבחן מחולק לשלושה חלקים. שימו לב להוראות בתחילת כל חלק.

<u>חלק א׳</u>
ענו על שש השאלות הבאות. כל תשובה נכונה שווה שבע נקודות.
יש לרשום את התשובות בסוף חלק זה.

1. נניח ש $\{a_n\}$ סדרה עולה, $\{b_n\}$ סדרה יורדת, ולכל n $a_n \le b_n$. אזי:
(א) שתי הסדרות מתכנסות ויש להן אותו הגבול
(ב) שתי הסדרות מתכנסות אבל לאו דווקא לאותו הגבול
(ג) יתכן שסדרה אחת מתכנסת והשניה מתבדרת
(ד) יש מקרים שבהם שתיהן מתכנסות ויש מקרים שבהם שתיהן מתבדרות, אבל לא יתכן שאחת מתכנסת ואחת מתבדרת.

2. תהי $\{a_n\}$ סדרה השואפת לאפס. אזי
(א) החל מ- n מסוים ואילך $-\frac{1}{n} < a_n < \frac{1}{n}$
(ב) החל מ- n מסוים ואילך $\frac{1}{|a_n|} > 2002$
(ג) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 0$
(ד) כל התשובות (א), (ב) ו (ג) נכונות.

3. תהי I_n סדרת קטעים אינסופיים מהסוג $[a_n, \infty)$ כך ש $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset$. אזי.
(א) $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ מכיל נקודה אחת בדיוק
(ב) $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ מכיל ∞ נקודות
(ג) או (א) או (ב)
(ד) אף תשובה מהנ״ל אינה נכונה

4. יהיו f ו g פונקציות מוגדרות על כל $\Re$ כך שהפונקציה המורכבת fog רציפה בכל $x \in \Re$. אזי
(א) f רציפה על $\Re$
(ב) g רציפה על $\Re$
(ג) לכל $x \in \Re$ או ש- f רציפה ב- x או ש- g רציפה ב- x

(ד) יתכן שקיים $x_0 \in \Re$ כך ש- f ו- g שתיהן לא רציפות ב- x_0.

5. הטור $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{r^n}{\sqrt{n}}$ מתכנס אם ורק אם

(א) $-1 \le r \le 1$ (ב) $0 < r \le 1$ (ג) $-1 < r < 1$

(ד) $-1 \le r < 0$ (ה) $-1 < r \le 1$

6. (לתלמידי פרופ׳ זלצמן וד״ר קליין בלבד)

תהי f פונקציה עולה ממש בסביבת x_0 וגזירה ב- x_0. אז הפונקציה ההפוכה f^{-1} תהי גזירה בנקודה $y_0 = f(x_0)$.

(א) בכל מקרה

(ב) אם ורק אם $f(x_0) \neq 0$

(ג) אם ורק אם $f'(x_0) \neq 0$

(ד) אף תשובה מהנ״ל אינה נכונה

6. (לתלמידי ד״ר הורוביץ בלבד).

תהי f פונקציה עולה ממש על קטע (a,b). אזי

(א) f רציפה ב-(a,b).

(ב) f חד-חד ערכית ב- (a,b)

(ג) (א) ו (ב) שניהם נכונים

(ד) (א) ו (ב) שניהם לא נכונים

<u>תשובות:</u>

1.__________ 2.____________ 3.____________

4.__________ 5.____________ 6.____________

<u>חלק ב׳</u>

ענו על <u>שתיים מתוך שלוש</u> השאלות הבאות. כל אחת שווה 15 נקודות.
עליכם לבחור את השאלות שיבדקו.

7. מצאו את משוואת קו המשיק לגרף $y = \frac{1 + x\cos x}{x+2}$ מעל הנקודה $x = 0$.

8. הוכיחו כי הסדרה $a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{2n}$ מתכנסת.

9. קבעו אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n 8^n \left(\frac{n}{n+2}\right)^{n^2}$ מתכנס בהחלט, מתכנס על תנאי או מתבדר ונמקו.

<u>חלק ג'</u>

ענו על <u>שתיים מתוך שלוש</u> השאלות הבאות. כל אחת שווה 15 נקודות.
עליכם לבחור את השאלות שיבדקו.

10. להוכיח או להפריך: אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס ואם הסדרה $\{b_n\}$ שואפת לאפס, אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ מתכנס.

11. תהי f רציפה בקטע $[-1,1]$ ונניח ש$0 < f(x) < 1$ לכל $x \in [-1,1]$.
הוכיחו כי הפרבולה $y = x^2$ חותכת את הגרף של f לפחות פעמיים בקטע $(-1,1)$.

12. (לתלמידי פרופ' זלצמן בלבד).
נגדיר $f(x)=\begin{cases}\sin 2x : x \ge 0 \\ x : x < 0\end{cases}$.
להוכיח או להפריך: f רציפה במידה שווה על $\Re$.

12. (לתלמידי ד"ר קליין בלבד).
תהי f גזירה בקטע I, ונניח שהישר $y = x$ חותך את הגרף של f מעל שתי נקודות של I. הוכיחו שקיים $c \in I$ כך ש - $f'(c)=1$.

12. (לתלמידי ד"ר הורוביץ בלבד).
תהי f מוגדרת ורציפה בקטע סגור $[a,b]$. נניח שלכל $x \in [a,b]$ $f(x) > 0$.
הוכיחו כי $\inf\{f(x): \ x \in [a,b]\} > 0$.